

TOLERANZ-GESTEUERTE RANDBEDINGUNGEN FÜR DIE FINITE-ELEMENTE-METHODE

Dipl.-Ing. Rüdiger Hochmuth, Prof. Dr.-Ing. Willy Schweiger

Kurzfassung

Ein Technisches System hat diverse Kriterien („DfX-Kriterien“) zu erfüllen, die sich teilweise gegenseitig beeinflussen können. Folglich sind diese „DfX-Kriterien“ und deren gegenseitige Wechselwirkungen zu betrachten. Eine Gruppe von Kriterien stellt die Tolerierung (Funktions-, Fertigungs- und Prüfgerechtigkeit) und die Steifigkeitsberechnung (Beanspruchungsgerechtigkeit) dar. In diesem Zusammenhang müssen die Auswirkungen der Paarung abweichungsbehafteter Geometrie (Passung) auf das Bauteilverhalten sowie der elastischen Deformation wiederum auf Position und Form von Elementen eines Bauteils untersucht werden. An dieser Stelle soll in einem ersten Ansatz die Kopplung der Fertigungsabweichung an die Finite-Elemente-Methode unternommen werden. Dies wird in dem vorliegenden Beitrag für den Fall der Paarung von Bauteilen mit Übermaßpassungen aufgezeigt. Ziel dieser Betrachtung soll das Herausarbeiten der gegenseitigen Beeinflussung von Tolerierung, Bauteilsteifigkeit, mechanischer und/oder thermischer Beanspruchung (Auswirkung auf die Lage, Form und Größe von Objekten) sowie die Optimierung hinsichtlich beider Kriterien sein.

1 Aufgabenstellung

Bei vielen Technischen Systemen stellt sich die Frage nach der Genauigkeit von Bewegungen oder der Nachgiebigkeit von Komponenten bei unterschiedlichen Beanspruchungen (Bild 1). Diese Fragestellungen können mit heutigen Methoden (statistische Toleranzkettenrechnung, Finite-Elemente-Methode, etc.) auf dem jeweiligen Gebiet zufriedenstellend gelöst werden. Die Abhängigkeiten oder Wechselwirkungen der Bereiche werden dabei allerdings nicht in Betracht gezogen.

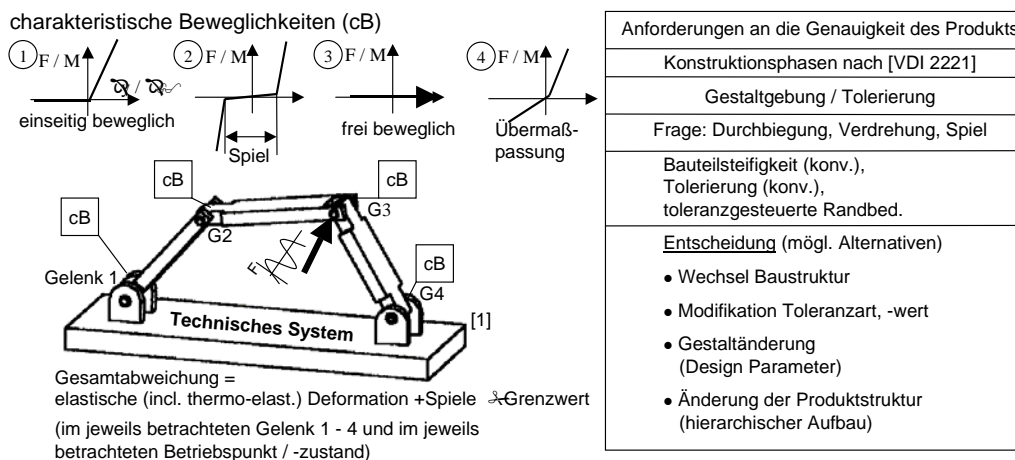


Bild 1: Aufgabenstellung, Lösungsansatz

So stehen fertigungsbedingte Abweichungen und elastische Deformationen von Maschinenteilen sehr wohl in Zusammenhang und sollten auch derart betrachtet werden. Beispielsweise erfordern maschinenbauliche Teile mit einer Mehrpunktauflagerung eine eingehende Strukturanalyse als auch eine Betrachtung dieser Teile im Gesamtzusammenhang der Baugruppe incl. der Anschlußgeometrien, die toleriert sind. Wechselwirkungen der abweichungsbehafteten Geometrie auf das elastische Verhalten eines Bauteils sowie der elastischen Deformation auf Position und Form von Elementen eines Bauteils werden untersucht. Eine ganzheitliche Betrachtung der Abweichungen, zusammengesetzt aus fertigungsbedingten Abweichungen und elastischer Deformation, kann Aufschlüsse über das Optimierungspotential geben (Bild 1).

2 Konzept

Um Aussagen über die gegenseitige Beeinflussung von Tolerierung und elastischer Deformation von Bauteilen zu erhalten, wird in diesem Beitrag die Grundlage für die Kopplung der abweichungsbehafteten und unter Übermaß gepaarten Komponenten (Bild 2) an die Finite-Elemente-Methode geschaffen. Durch diese Vorgehensweise sollen die Fragestellungen (Bild 2) nach Einfluß der tolerierten Übermaßpassung auf das Bauteilverhalten (Eigenspannungen) und nach Einfluß der elastischen Deformation von Bauteilen auf die Lage, Form und das Maß von Elementen eines Bauteils beantwortet werden.

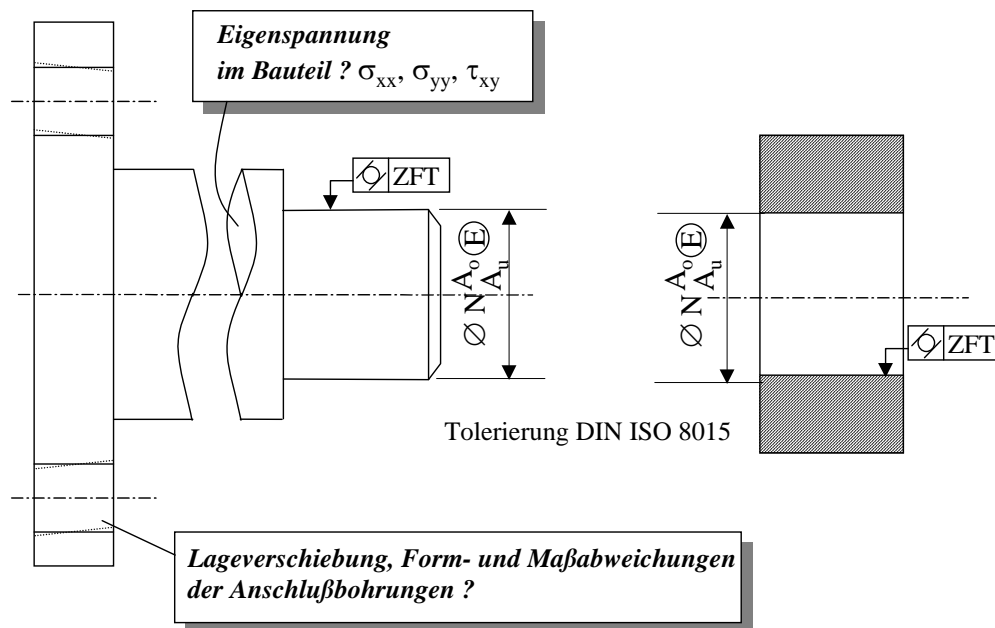
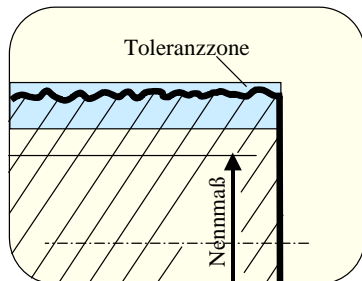


Bild 2: Paarungssituation, Fragestellungen

Zuerst wird die Überlagerung der Maß- und Formtoleranz erarbeitet, die in die Berechnung der Kontaktzone der Bauteilverbindung eingeht (Bild 3a). Die Kopplung der, mittels Erwartungswert und Varianz, stochastisch beschriebenen Kontaktzone (Bild 3b) an das Finite-Elemente-Verfahren (Bild 3c) liefert die Auswirkung der abweichungsbehafteten Bauteilgeometrie auf die Eigenspannungen der Bauteile und Lageverschiebungen funktionswichtiger Elemente der Bauteile hinsichtlich Lage, Form und Maß (vgl. Fragestellung nach Bild 2).

a) Überlagerung von Maß und Form b) Ermittlung der Kontaktzone c) Ankopplung an das FE-Verfahren

Kontaktfläche an Bauteil 1
 Hüllbedingung
 Verteilung der Maßabweichung
 Verteilung der Formabweichung



Kontaktfläche an Bauteil 2
 Hüllbedingung
 Verteilung der Maßabweichung
 Verteilung der Formabweichung

Bauteil 1 Materialeigenschaft 1
 Temperatur 1
 Kontaktfläche 1
 Verteilung f_1

Bauteil 2 Materialeigenschaft 2
 Temperatur 2
 Kontaktfläche 2
 Verteilung f_2

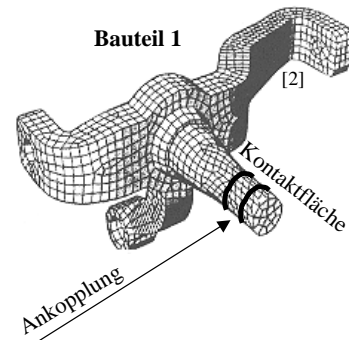
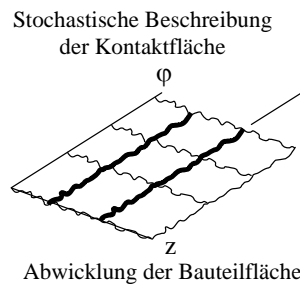


Bild 3: Konzept der Kopplung

3 Ermittlung der Verteilungsfunktion

Die Verteilungen der betrachteten Toleranzen nach Maß und Form können nicht mit Hilfe des Faltungssatzes überlagert werden, da beide Verteilungen nicht als unabhängig angenommen werden dürfen. Die Verteilungsfunktion der Superposition von Maß- und Formverteilung sei gegeben durch eine Überlagerung einer Normalverteilung der Maß- (Bild 4a) und einer Weibullverteilung der Formtoleranz (Bild 4b). Es wird postuliert, daß die Formtoleranzzone um den Erwartungswert der Maßtoleranzverteilung lokalisiert sein wird.

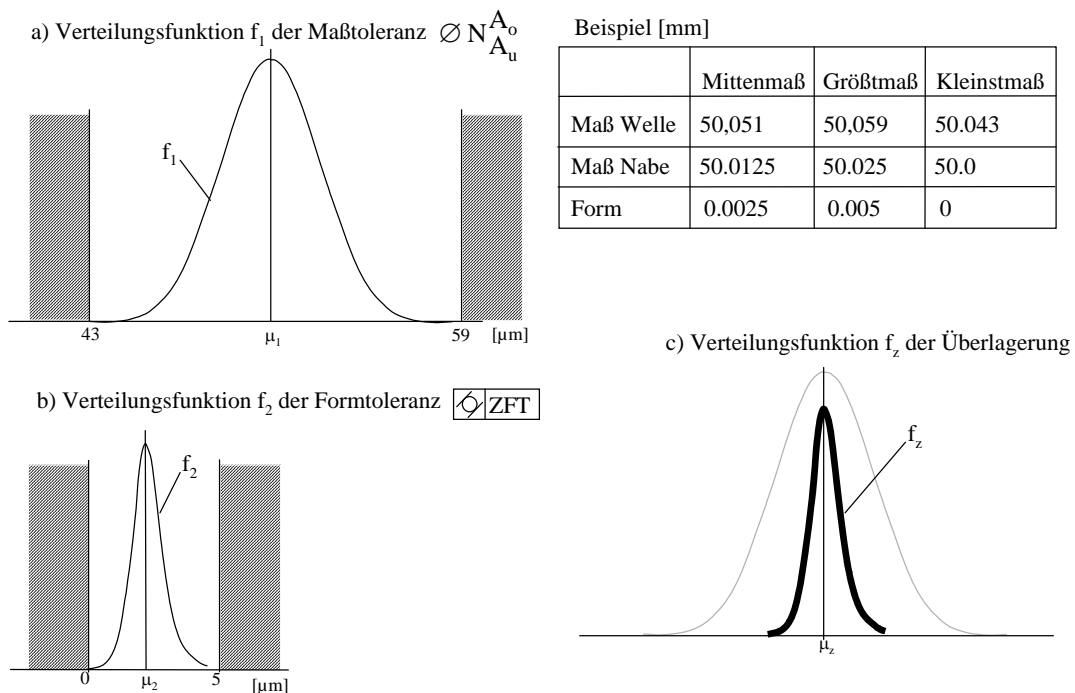


Bild 4: Überlagerung zweier Verteilungen

Anhand der Superposition (Bild 4c) kann der Erwartungswert als Moment erster Ordnung und die Varianz als Moment zweiter Ordnung folgendermaßen gebildet werden:

$$f_z = f_2 \quad (1)$$

$$\mu_z = \mu_1, \quad \sigma_z^2 = \sigma_2^2 \quad (2)$$

4 Ermittlung der Kontaktzone

Zur Ermittlung der Kontaktzone zweier gepaarter Komponenten (Bild 5), werden die Formulierungen zur analytischen Lösung von Schrumpfvverbindungen für den „Ebenen Formänderungszustand“ (Der ebene Formänderungszustand EFZ stellt sich in einem in z-Richtung prismatischen Körper mit in z-Richtung konstanter Belastung ein, dessen Verzerrung ε_{zz} in z-Richtung behindert wird. [3]) eines dickwandigen Rohrs und eines Zylinders (nach [3]) im Sinne einer ersten Näherung verwendet. Die Bauteiloberflächen seien durch die statistischen Parameter nach (1) und (2) beschrieben. Hierbei werden Fliehkraftanteile im Betriebszustand nicht in die Rechnung einbezogen.

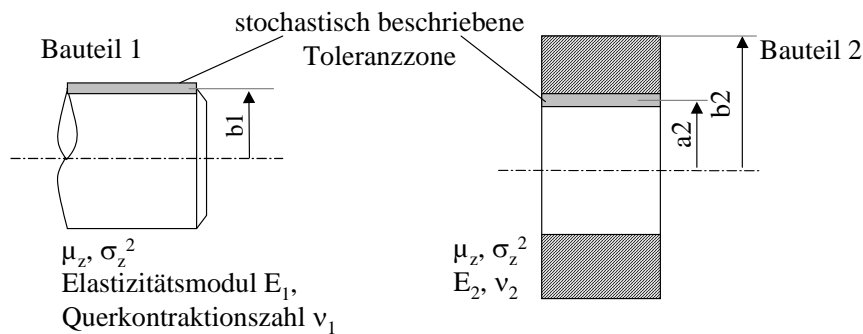


Bild 5: Gegebene Parameter zur Ermittlung der Kontaktzone

Für die Bauteile lassen sich folgende Gleichungssätze aufstellen [3]:

	Zylinder	dickwandiges Rohr
Radialspannung	$\sigma_{r1(r)} = A_1 - \frac{B_1}{r^2}$	$\sigma_{r2(r)} = A_2 - \frac{B_2}{r^2}$
Umfangsspannung	$\sigma_{\varphi1(r)} = A_1 + \frac{B_1}{r^2}$	$\sigma_{\varphi2(r)} = A_2 + \frac{B_2}{r^2}$
Verschiebung	$u_{r1(r)} = \frac{1}{2G_1} \left\{ \frac{1-\nu_1}{1+\nu_1} A_1 r + \frac{B_1}{r} \right\}$	$u_{r2(r)} = \frac{1+\nu_2}{E_2} \left\{ (1-2\nu_2) A_2 r + \frac{B_2}{r} \right\}$

Anhand der Randbedingungen können die Integrationskonstanten A_1, A_2, B_1, B_2 bestimmt werden:

$\sigma_{r1}(0) \neq \infty; \sigma_{\varphi1}(0) \neq \infty$	→	$B_1 = 0$
$\sigma_{r1}(a) = -p_s$	→	$A_1 = -p_s$
$\sigma_{r2}(b_2) = 0$	→	$B_2 = A_2 b_2^2$
$\sigma_{r2}(a) = -p_s$	→	$A_2 = \frac{a^2 p_s}{b_2^2 - a^2}$

wobei $a = \frac{1}{2} (b_1 + a_2)$ ist und der Schrumpfdruck p_s sich aus folgender Gleichung nach dem Ebenen Formänderungszustand EFZ ermitteln läßt (Kompatibilitätsbedingung) [3]:

$$\frac{b_1 - a_2}{a} = \varepsilon_{\varphi 2(a)} - \varepsilon_{\varphi 1(a)} = \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2} \left\{ \sigma_{\varphi 2(a)} - \frac{\nu_2}{1 - \nu_2} \sigma_{r2(a)} \right\} - \frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1} \left\{ \sigma_{\varphi 1(a)} - \frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \sigma_{r1(a)} \right\}$$

Für die unbekannte Verschiebung u_{r1} läßt sich somit unter Berücksichtigung des Zusammenhangs $E = 2 G (1 + \nu)$ folgende lineare Abhängigkeit vom Radius berechnen:

$$u_{r1(r)} = \frac{1 - \nu_1}{E_1} (-p_s) r = \frac{(1 - \nu_1) (b_1 - a_2) (a^2 - b_2^2) E_2 r}{a (-2E_2 \nu_1^2 b_2^2 + 2E_2 \nu_1^2 a^2 - E_2 \nu_1 b_2^2 + E_2 \nu_1 a^2 - 2E_1 \nu_2^2 a^2 + E_1 \nu_2 b_2^2 - E_1 \nu_2 a^2 + E_1 b_2^2 - E_2 a^2 + E_2 b_2^2 + E_1 a^2)}$$

Die Verschiebung u_{r1} ist eine Funktion der Parameter $b_1, a_2, b_2, E_1, E_2, \nu_1, \nu_2$ und r .

Die Vereinfachung der Verschiebung u_{r1} mit $E_1 = E_2 = E$ und $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ergibt folgenden Zusammenhang:

$$u_{r1(r)} = \frac{(1 - \nu) (b_1 - a_2) (a^2 - b_2^2) r}{2ab_2^2 (1 - \nu^2)} \quad (3)$$

In unserer Betrachtung seien die Parameter b_1 und a_2 abweichungsbehaftet:

$$b_1 = \mu_z \pm 3 \sigma_z, \quad a_2 = \mu_z \pm 3 \sigma_z \quad (\text{Konfidenzbereich } 99,73 \%)$$

mit $\mu_z = \mu_1 = \int x f_1(x) dx$ und $\sigma_z = \sigma_2 = \int x^2 f_2(x) dx$ nach (2).

Die Anwendung des Erwartungswertoperators auf (3) ergibt für das Moment erster Ordnung:

$$E\{u_{r1(r)}\} = \frac{(1 - \nu) (E\{b_1\} - E\{a_2\}) (E\{a\}^2 - E\{b_2\}^2) r}{2E\{a\}E\{b_2\}^2 (1 - \nu^2)} \quad (4)$$

Die Varianz als Moment zweiter Ordnung liefert:

$$\text{Var}\{u_{r1(r)}\} = \frac{(1 - \nu) (\text{Var}\{b_1\} - \text{Var}\{a_2\}) (\text{Var}\{a\}^2 - \text{Var}\{b_2\}^2) r}{2\text{Var}\{a\}\text{Var}\{b_2\}^2 (1 - \nu^2)} \quad (5)$$

Dadurch kann die Kontaktzone mit Hilfe der statistischen Parameter beschrieben werden, wobei für beide zu paarende Partner eine identische Verteilungsfunktion angenommen werden muß:

$$E\{u_{r1(r)}\} \pm 3 \text{Var}\{u_{r1(r)}\}^{1/2}$$

Der thermische Einfluß läßt sich nach Ersetzen der Parameter b_1 und a_2 durch

$$b_1 = b_{10} \{1 + \alpha_1 (\nu_1 - \nu_0)\}$$

$$b_2 = a_{20} \{1 + \alpha_2 (\nu_2 - \nu_0)\}$$

in die Berechnung einbeziehen (b_{10}, a_{20} sind die Parameter b_1, a_2 zur Referenztemperatur ν_0 , ν_1, ν_2 die Temperaturen der Komponenten). Durch Erweiterung des Modells mit Verteilungen für andere Parameter lassen sich selbstverständlich qualitative Rechnungen zum Einfluß der Parameterstreuung auf das Gesamtergebnis durchführen.

5 Ankopplung an die FE-Methode

Die Ankopplung kann sowohl an die FEM als auch an die REM erfolgen. In diesem Beitrag wird nur auf die FEM eingegangen [4].

Von der FEM für linear elastisches Materialverhalten mit kleinen Deformationen ist folgendes Gleichungssystem

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{F}^{(a)}$$

bekannt [5], wobei K die bekannte Steifigkeitsmatrix des Systems, u der Verschiebungs- und/oder Verdrehungsvektor und F der Vektor äußerer Kräfte und/oder Momente ist.

Das Gleichungssystem kann auf folgende Weise partitioniert werden:

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \end{bmatrix} \quad (6)$$

Hier sind die Untermatrizen K_{aa} , K_{ab} , K_{ba} und K_{bb} sowie die Verschiebungen u_b und die Kräfte F_a bekannt. Die Verschiebungen u_a und Kräfte F_b sind unbekannt. Die Matrizen K_{aa} und K_{bb} sind quadratisch und symmetrisch. Der Vektor der unbekanntenen Knotenverschiebungen u_a kann aus dem Gleichungssystem (6) extrahiert werden:

$$u_a = K_{aa}^{-1} [F_a - K_{ab} u_b]$$

mit den Abkürzungen $x := u_a$, $a := K_{aa}^{-1} F_a$, $B := K_{aa}^{-1} K_{ab}$ und $u := u_b$ folgt:

$$x = a - B u \quad (7)$$

Der Erwartungswertoperator führt im Falle einer identischen Verteilungsfunktion aller bekannten u_b zu:

$$E\{x\} = E\{a - B u\} = E\{a\} - E\{B u\} = a - B E\{u\}$$

mit den Abkürzungen $m_x := E\{x\}$ und $m_u := E\{u\} = E\{u_{r1} \dots\}$ (nach (4)) folgt:

$$m_x = a - B m_u \quad (8)$$

Diese Gleichung beschreibt den Erwartungswert der unbekanntenen Verschiebungen als Funktion des Erwartungswertes der Randbedingungen.

Bildet man die Differenz (7) – (8)

$$x - m_x = B m_u - B u$$

und multipliziert zu diesem Term den transponierten Vektor $(x - m_x)^T$ so folgt unter Anwendung des Erwartungswertoperators die Gleichung

$$E\{(x - m_x)(x - m_x)^T\} = E\{(B m_u - B u)(x - m_x)^T\}$$

Auf der linken Seite findet man die erforderliche Kovarianzmatrix der unbekanntenen Verschiebungen. Die rechte Seite der Gleichung lässt sich durch Anwendung von Gleichung (7) und (8) auf folgende Form bringen:

$$E\{(B m_u - B u) (B m_u - B u)^T\} = E\{[B (m_u - u)] [B (m_u - u)]^T\} = B E\{(m_u - u) (m_u - u)^T\} B^T$$

Mit der Kenntnis der Kovarianzmatrix von u und m_u (z.B. Einheitsmatrix $1 * \text{Var}\{u_{r1} \}$ nach(5)) kann die Kovarianzmatrix von x und m_x bestimmt werden:

$$\text{Cov}_{(x,mx)} = B \text{Cov}_{(u,mu)} B^T \quad (9)$$

Im Falle unterschiedlicher Verteilungsfunktionen an verschiedenen Kontaktstellen des Bauteils (z.B. Kontakt der Anschlußbohrungen des Bauteils in Bild 1 mit weiteren Bauteilen) kann die Superposition von M Randbedingungen berechnet werden, wobei für jede der M Rechnungen ($M-1$) Randbedingungen fix sind und ein Knoten mit einer Verteilung beaufschlagt wird:

$$\begin{array}{ll} u_{a1} = a - B u_{b1} & \text{mit der Verteilungsfunktion } f_1 \\ \vdots & \\ u_{aM} = a - B u_{bM} & \text{mit der Verteilungsfunktion } f_M \end{array}$$

Die Erwartungswerte der einzelnen Gleichungen können analog (8) berechnet und anschließend überlagert werden:

$$E\{u_{a1}\} + \dots + E\{u_{aM}\} = M*a - B [E\{u_{b1}\} + \dots + E\{u_{bM}\}]$$

Die gleiche Superposition kann für die Kovarianzmatrizen nach (9) gebildet werden:

$$\sum_{i=1}^M \text{Cov}_a^i = B \sum_{i=1}^M \text{Cov}_b^i B^T$$

Durch die Ermittlung des Erwartungswerts und der Kovarianzmatrix für die unbekanntes Verschiebungen als Funktion der Erwartungswerte und Streuungen bekannter Verschiebungen sowohl für identische als auch für verschiedene Verteilungsfunktionen an den Kontaktstellen liefert die Finite-Elemente-Methode Werte für alle unbekanntes Knotenverschiebungen des Netzes. Somit sind Aussagen über die Lageverschiebungen von funktional wichtigen Elementen des Bauteils und die Eigenspannungsverteilung möglich.

6 Zusammenfassung

Dieser Beitrag zeigt die Notwendigkeit und beschreibt die Möglichkeit der Integration von Toleranzanalyse und Analyse der Bauteilsteifigkeit in den Konstruktionsprozeß im Sinne einer multi-kriteriellen Betrachtungsweise. Das dargestellte Verfahren der Ankopplung von statistischen Werten für die Verschiebungen an die Finite-Elemente-Methode gibt dem Produktentwickler die Möglichkeit, die Abweichungen aus der Tolerierung (Form, Maß und Lage) und der elastischen Deformation des Bauteils zu beurteilen. Ein nächster Schritt müßte die Betrachtung des einzelnen Bauteils im Verbund mit anderen Bauteilen des Technischen Systems (vgl. Bild 1) sein.

Das Ergebnis einer derartigen Analyse könnte schließlich die Entscheidung des Wechsels der Baustruktur von der Differential- zur Integralbauweise, Modifikation von Toleranzart/-wert, Gestaltänderung der Bauteile einer Baugruppe oder die Änderung der Produktstruktur (vgl. Bild 1) sein, um die Anforderungen an die Gesamtabweichung (zusammengesetzt aus elastischer Deformation und Spiel) zu erfüllen. Ein weiteres Ziel kann auch das Ableiten von

Konstruktionsrichtlinien zur funktions- und fertigungsgerechten Definition der Tolerierung als auch zur beanspruchungsgerechten Gestaltfestlegung des Bauteils sein.

7 Literaturverzeichnis

- [1] Koller, F., CAD-gestützte Toleranzrechnung basierend auf der Auswertung von Kontaktkräften in einem Mehrkörpersimulationsmodell, VDI-Fortschrittberichte, Reihe 20, Nr. 219, Düsseldorf, 1996.
- [2] Fröhlich, P., FEM-Leitfaden, Einführung und praktischer Einsatz von Finite-Element-Programmen, Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [3] Kuhn, G., Höhere Festigkeitslehre, Erlangen, Vorlesungsskript.
- [4] Hochmuth, R., Meerkamm, H., Schweiger, W., An Approach to a general View on Tolerances in Mechanical Engineering, 2nd International Workshop on Integrated Product Development (Ed. Vajna), Magdeburg, 1998.
- [5] Knothe, K., Wessels, H., Finite Elemente, Springer Berlin, 1991.

Dipl.-Ing. Rüdiger Hochmuth
Prof. Dr.-Ing. Willy Schweiger
Lehrstuhl für Konstruktionstechnik
Universität Erlangen-Nürnberg
91058 Erlangen, Martensstr. 9, Deutschland
Tel: +49 9131 85 7987
Fax: +49 9131 85 7987
EMail: hochmuth@mfk.uni-erlangen.de
Internet: <http://www.mfk.uni-erlangen.de>